

11 novembre 2025

Corrigé 8

**Exercice 1.** Dans chaque cas, trouver une base échelonnée réduite du sous-espace vectoriel  $W$  de  $K^n$  (on dit qu'une base ordonnée est « échelonnée réduite » si, en mettant les vecteurs dans l'ordre donné dans les lignes d'une matrice, la matrice est échelonnée réduite). Ensuite, compléter la base trouvée en une base de  $K^n$ .

- (a)  $K = \mathbb{Q}$ ,  $n = 3$  et  $W = \text{Vect}((1, 3, -2), (2, -3, 5))$ .
- (b)  $K = \mathbb{C}$ ,  $n = 3$  et  $W = \text{Vect}((1, i, 2), (1 + i, i, 2 + i), (1, 0, 1))$ .
- (c)  $K = \mathbb{F}_3$ ,  $n = 5$  et  $W = \text{Vect}((0, 2, 1, 0, 2), (1, 0, 1, 2, 1), (2, 0, 2, 2, 1))$ .

**Solution 1.** Pour obtenir une base échelonnée réduite du sous-espace vectoriel  $W$ , on met les coefficients de chaque vecteur de la partie génératrice dans une ligne d'une matrice et on fait une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice pour obtenir une matrice échelonnée réduite. Les lignes non nulles de cette matrice échelonnée réduite forment une base échelonnée réduite du sous-espace vectoriel  $W$ .

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -2L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{1}{9}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow -3L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc les vecteurs  $(1, 0, 1)$  et  $(0, 1, -1)$  forment une base échelonnée réduite de  $W$ . On peut la compléter par le vecteur  $(0, 0, 1)$  pour trouver une base de  $\mathbb{Q}^3$ .

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 1 + i & i & 2 + i \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow (-1-i)L_1 + L_2 \\ L_3 \rightarrow -L_1 + L_3}} \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & -i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow iL_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow -iL_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc les vecteurs  $(1, 0, 1)$  et  $(0, 1, -i)$  forment une base échelonnée réduite de  $W$ . On peut la compléter par le vecteur  $(0, 0, 1)$  pour trouver une base de  $\mathbb{C}^3$ .

(c) On utilise que  $-2 = 1$  et  $2^{-1} = 2$  dans  $\mathbb{F}_3$  et on trouve

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc les vecteurs  $(1, 0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 2, 0, 1)$  et  $(0, 0, 0, 1, 2)$  forment une base échelonnée réduite de  $W$ . On peut la compléter par les deux vecteurs  $(0, 0, 1, 0, 0)$  et  $(0, 0, 0, 0, 1)$  pour trouver une base de  $\mathbb{F}_3^5$ .

**Exercice 2.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . À l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss, déterminer les valeurs du paramètre  $a$  pour lesquelles le système

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z = a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z = a - a^2 \\ x + y + z = 1 - a \end{cases}$$

- (a) n'admet aucune solution,
- (b) admet une infinité de solutions,
- (c) admet une solution unique.

Ensuite, résoudre le système dans les cas (b) et (c).

**Solution 2.** On écrit la matrice augmentée du système, en échangeant la première et la dernière ligne

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ a & 1-a & 1-a & a^2 \\ a & 1+a & 1+a & a-a^2 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \rightarrow -aL_1+L_3]{L_2 \rightarrow -aL_1+L_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & 1-2a & 1-2a & 2a^2-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2a & 1-2a & 2a^2-a \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \rightarrow (2a-1)L_2+L_3]{L_1 \rightarrow -L_2+L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2-a \end{array} \right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite. On distingue les cas :

- (a) Si  $a \neq 0$  et  $a \neq 1/2$ , le nombre  $2a^2 - a$  est non nul. La dernière équation ne peut être vérifiée et le système ne possède pas de solutions. L'ensemble des solutions du système est vide.
- (b) Si  $a = 0$  ou  $a = 1/2$ , la dernière équation donne  $0 = 0$ . Il reste alors deux équations à trois inconnues. On a ainsi une infinité de solutions paramétrées par  $z \in \mathbb{R}$ . On a toujours  $x = 1 - a$  et  $y = -z$ . On choisit  $z$  comme inconnue libre, c'est-à-dire comme paramètre et on obtient l'ensemble des solutions :

$$S = \{(1-a; -z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Le système possède une droite entière de solutions.

- (c) Finalement, comme nous avons étudié tous les cas, nous constatons que pour aucune valeur du paramètre  $a$  le système possède une solution unique.

**Exercice 3.** Soit  $\alpha : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3$  l'application  $\mathbb{C}$ -linéaire définie par

$$\alpha(x, y, z, t) = ((i+1)x, 3x + iy + (-1+i)t, y + (a+i)t)$$

avec  $a \in \mathbb{R}$ , un nombre réel fixe.

- (a) Trouver une base échelonnée réduite de  $Im(\alpha)$ .
- (b) Quel est le rang de  $\alpha$ ?
- (c) Quelle est la dimension de  $ker(\alpha)$ ?

**Solution 3.**

(a) Par définition, la matrice de  $\alpha$  par rapport aux bases canoniques de  $\mathbb{C}^4$  et de  $\mathbb{C}^3$  est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & i & 0 & -1+i \\ 0 & 1 & 0 & a+i \end{pmatrix}. \text{ Rappelons que les colonnes de } A \text{ sont les composantes des images}$$

des vecteurs de base, qui engendrent  $\text{Im}(\alpha)$ . Pour trouver une base échelonnée réduite de  $\text{Im}(\alpha)$ , on transpose  $A$ , ce qui fait apparaître les générateurs de  $\text{Im}(\alpha)$  en lignes. On fait alors une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de la transposée de  $A$ . Les lignes non nulles de la matrice échelonnée réduite obtenue forment une base échelonnée réduite de  $\text{Im}(\alpha)$ .

$$\begin{aligned} \text{transpose} \rightarrow & \begin{pmatrix} i+1 & 3 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & a+i \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \rightarrow (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)L_1 \\ L_2 \rightarrow -iL_2}]{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & -1+i & a+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{L_3 \rightarrow (1-i)L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si  $a \neq 1$ , on peut multiplier la 3ème ligne par  $(a-1)^{-1}$  et on obtient que les vecteurs  $v_1 = (1, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, -i)$  et  $v_3 = (0, 0, 1)$  forment une base échelonnée de  $\text{Im}(\alpha)$ . Par conséquent,  $\text{Im}(\alpha)$  est de dimension 3 si  $a \neq 1$  et donc une base échelonnée réduite est  $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ .

Si  $a = 1$ , il ne reste que 2 lignes non nulles et on obtient que les vecteurs  $v_1 = (1, 0, \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i)$  et  $v_2 = (0, 1, -i)$  forment une base échelonnée réduite de  $\text{Im}(\alpha)$ . Par conséquent,  $\text{Im}(\alpha)$  est de dimension 2 si  $a = 1$ .

(b) Le rang de  $\alpha$  est la dimension de  $\text{Im}(\alpha)$ , donc 3 si  $a \neq 1$ , et 2 si  $a = 1$ .

(c) Par le théorème du rang,  $\dim \ker(\alpha) = \dim(\mathbb{C}^4) - \dim \text{Im}(\alpha)$ . Si  $a \neq 1$ , on trouve  $4 - 3 = 1$ . Si  $a = 1$ , on trouve  $4 - 2 = 2$ .

**Exercice 4.** Soit  $\phi : \mathbb{C}^4 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$  l'application linéaire définie par  $\phi(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a-b+c & a+b+d \\ 2a-ib & ib+c+d \end{pmatrix}$ .

Trouver une base de  $\text{Im}(\phi)$ .

**Solution 4.** On sait que  $\text{Im}(\phi)$  est engendré par  $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3), \phi(e_4)\}$ , où  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est la base canonique de  $\mathbb{C}^4$ .

$$\text{On trouve } \phi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \phi(e_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \phi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \phi(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On écrit ces 4 matrices comme des vecteurs lignes par rapport à la base  $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  de  $M_2(\mathbb{C})$ , dans les lignes d'une matrice  $A$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On échelonne la matrice et on trouve que sa forme échelonnée réduite est

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on pose les matrices correspondant aux lignes de  $R$  pour trouver une base de  $\text{Im}(\phi)$ , notamment :

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Noter que pour trouver une base, une forme seulement échelonnée de la matrice suffirait.

---

**Exercice 5.** On considère des matrices à coefficients réels. Dans chaque cas trouver, si possible, les valeurs des nombres réels  $a$  et  $b$  telles que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 \\ b & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

soient de rang 2.

**Solution 5.** En faisant des opérations élémentaires sur les lignes de  $M$ , on ne change pas son rang.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow -2L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 - 2a & b - 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{L_1 \rightarrow -L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 - 2a & b - 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Maintenant on voit facilement que le rang de  $M$  est 2 si et seulement si la première ligne vaut 0, donc  $a = 1$  et  $b = 3$ .

Pour  $N$ , on commence par prendre la transposée afin de simplifier les calculs, puis on fait des opérations élémentaires.

$$\begin{pmatrix} 3 & a & b & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_3 + L_1 \\ L_1 \rightarrow -2L_2 + L_1}} \begin{pmatrix} 0 & a - 1 & b - 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si  $a = 1$  et  $b = 2$ , alors  $N$  est de rang 2, sinon elle est de rang 3.

---

**Exercice 6.** Soient  $V$ ,  $W$  et  $U$  des  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie (non nulle). Soient  $\alpha : V \rightarrow W$  et  $\beta : W \rightarrow U$  des applications  $K$ -linéaires. On fixe des bases  $B_V, B_W$  et  $B_U$  de  $V$ ,  $W$  et  $U$  respectivement et on pose  $A = [\alpha]_{B_V, B_W}$  et  $B = [\beta]_{B_W, B_U}$ .

- Démontrer que  $\text{Im}(\beta \circ \alpha) \subseteq \text{Im}(\beta)$ .
- Démontrer que  $\text{rg}(BA) \leq \text{rg}B$ .
- Démontrer que  $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\beta \circ \alpha)$ .
- Démontrer que  $\text{rg}(BA) \leq \text{rg}A$ .
- Trouver, dans chaque cas, un exemple où l'inclusion ou l'inégalité est stricte.
- Trouver, dans chaque cas, un exemple où l'inclusion ou l'inégalité constitue une égalité.

**Solution 6.**

- a) Soit  $z \in \text{Im}(\beta \circ \alpha)$ . Donc il existe  $x \in V$  tel que  $z = \beta(\alpha(x))$ . Comme  $\alpha(x) \in W$ , on a  $y \in W$  tel que  $z = \beta(y)$ . Donc  $z \in \text{Im}(\beta)$ . Comme  $z$  est arbitraire, on a  $\text{Im}(\beta \circ \alpha) \subseteq \text{Im}(\beta)$ .
- b) Noter d'abord que  $BA$  est la matrice de  $\beta \circ \alpha$  par rapport aux bases  $B_V$  et  $B_U$ . Ainsi,  $\text{rg}(BA) = \text{rang colonne}(BA) = \dim \text{Im}(\beta \circ \alpha)$  et  $\text{rg}(B) = \text{rang colonne}(B) = \dim \text{Im}(\beta)$ . Comme  $\text{Im}(\beta \circ \alpha) \subseteq \text{Im} \beta$  on a que  $\dim(\text{Im}(\beta \circ \alpha)) \leq \dim(\text{Im} \beta)$ .
- c) Soit  $x \in \ker(\alpha)$ . Donc  $\alpha(x) = 0$ . Comme  $\beta$  est linéaire,  $\beta(0) = 0$ , et on a  $\beta(\alpha(x)) = \beta(0) = 0$ . Par conséquent  $x \in \ker(\beta \circ \alpha)$ . Comme  $x \in \ker(\alpha)$  est arbitraire, on a  $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\beta \circ \alpha)$ .
- d) Le rang de  $BA$  est la dimension de l'image de  $\beta \circ \alpha$  et le rang de  $A$  est la dimension de l'image de  $\alpha$ . Par le théorème du rang  $\dim V = \dim \ker(\beta \circ \alpha) + \dim \text{Im}(\beta \circ \alpha)$  et  $\dim V = \dim \ker \alpha + \dim \text{Im} \alpha$ . Par c),  $\dim \ker(\beta \circ \alpha) \geq \dim \ker \alpha$ . Donc  $\dim(\text{Im}(\beta \circ \alpha)) = \dim V - \dim(\ker(\beta \circ \alpha)) \leq \dim V - \dim(\ker \alpha) = \dim(\text{Im} \alpha)$ .
- e) Prenons  $V = W = U \neq \{0\}$ . Pour (a), prenons  $\alpha$  l'application nulle, et  $\beta$  l'application identité. Dans ce cas,  $\text{Im}(\beta \circ \alpha) = 0$ . Pour une inégalité stricte dans (b) on prend les matrices correspondantes. Pour une inclusion stricte dans (c), on prend  $\alpha$  l'application identité et  $\beta = 0$ . Dans ce cas,  $\ker(\beta \circ \alpha) = V$ . Pour une inégalité stricte dans (d), prenons  $B = 0$  et  $A$  la matrice identité.
- f) Si  $V = W = U$  et  $\alpha$  et  $\beta$  sont bijectives, on a l'égalité des deux images dans (a). Pour (b), on prend les matrices identités par exemple. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont bijectives, alors les deux noyaux sont nuls, ce qui donne une égalité dans (c). Pour une égalité dans (d), prenons  $A$  et  $B$  les matrices identités.